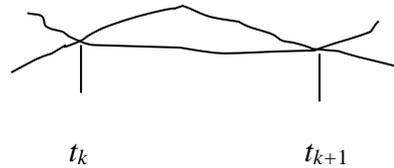


# ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

## ЛЕКЦИЯ 7

### 3.4 Теорема Котельникова

При дискретизации непрерывно изменяющиеся выходные переменные объекта воспринимаются цифровой системой в фиксированные моменты времени. Но если эти переменные будут изменяться в промежутках между моментами измерения, система об этом "знать" не будет (см. рисунок).



Следовательно, при дискретизации может теряться часть исходной информации. Как определить, в каких случаях теряется информация?

Ответ на этот вопрос удалось получить, анализируя спектры непрерывного и дискретного сигналов. Результат такого анализа дает теорема Котельникова. В англоязычных странах эту теорему называют теоремой квантования, прерывания, Шенона или Найквиста. Котельников первым получил этот результат, но в англоязычных странах он, видимо, был неизвестен. Только после исследований Шенона и Найквиста он там нашел применение. Мы будем называть ее теоремой Котельникова.

На рисунке 3.6 (см. лекцию 6) в центре находится спектр исходного аналогового сигнала, справа и слева от него расположены копии, возникающие от дискретизации. Как видно из рисунка, в центральном спектре содержится вся информация, содержащаяся в аналоговом сигнале. Спрашивается, как получить эту информацию, имея дискретный сигнал со спектром на рисунке 3.6? Очевидно, для этого нужно пропустить дискретный сигнал через идеальный фильтр низких частот с АЧХ, показанной на рисунке 3.6 пунктиром. Этот фильтр имеет частоту среза, равную половине частоты дискретизации  $\omega_0/2$ . На выходе фильтра мы получим данные для полного восстановления аналогового сигнала. Выходит, что из любого дискретного сигнала подобным образом можно восстановить исходный аналоговый сигнал? На самом деле это не так. Обратимся вновь к рисунку 3.6. Мы видим, что на этом рисунке спектр аналогового сигнала зануляется до достижения половины частоты дискретизации  $\omega_0/2$ . Но мы можем выбрать частоту дискретизации, половина которой захватит "хвост" спектра аналогового сигнала. Тогда будет совсем другая картина (рисунок 3.7).

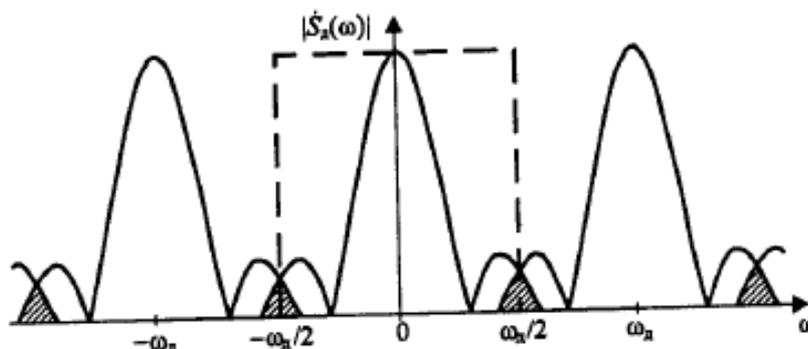


Рисунок 3.7 – Перекрывание сдвинутых копий спектра дискретизированного сигнала при недостаточно высокой частоте дискретизации

Как видно, сдвинутые копии спектра аналогового сигнала накладываются друг на друга, что приводит к искажению как дискретного, так и восстановленного сигнала. При дискретизации аналогового сигнала в результате наложения появляются ложные частоты, отсутствующие в исходном аналоговом сигнале. Что неприятно, это низкие частоты, вплоть до нулевой частоты. Их часто называют биениями (стробоскопический эффект). Частота  $\omega_0/2$  называется частотой Котельникова, Найквиста, или Шенона. Мы ее будем называть частотой Найквиста. Из рассмотренного свойства следует теорема Котельникова: *аналоговый сигнал, спектр которого равен нулю вне интервала  $(-\omega_{\max}, \omega_{\max})$  однозначно представляется своими значениями в равноотстоящих точках, если половина частоты квантования больше  $\omega_{\max}$* . Ясно, что частота здесь в рад/с (1/с). Это записывается следующим образом

$$\omega_0/2 \geq \omega_{\max} \quad (3.37)$$

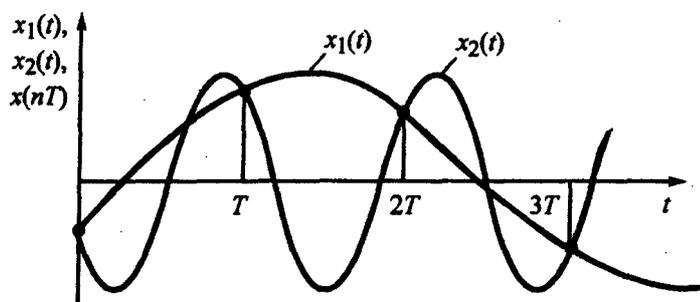
Аналоговый сигнал может быть восстановлен из цифрового по формуле ряда Котельникова

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \frac{\sin \omega_0(t - kT)/2}{\omega_0(t - kT)/2} \quad (3.37-$$

1)

Как видно, это сумма отношений синусов на свои аргументы, сдвинутых по оси времени на  $kT$ . Из теоремы Котельникова следует, что если аналоговый сигнал, подлежащий дискретизации, содержит частоты, превышающие частоту Найквиста, то его необходимо пропустить через ФНЧ с частотой среза, равной или меньшей частоты Найквиста. Другой вариант – поднять частоту Найквиста путем увеличения частоты дискретизации. В противном случае высокочастотные помехи трансформируются в низкочастотные сигналы, воспринимаемые системой. Этот эффект (в англоязычной литературе aliasing (элайсинг)) называется эффектом поглощения частот, так как высокая частота помехи поглощается частотой, равной разности частот дискретизации и помехи. (Солонина, с. 199: антиэлайсинговый фильтр).

Физически это можно пояснить тем, что при низкой частоте дискретизации через одни и те же отчеты можно провести несколько синусоид разной частоты (рисунок). Эффект переноса частоты может сильно снизить качество управления, вплоть до потери работоспособности системы.



### 3.5 Z-преобразование

Z-преобразование является аналогом преобразования Лапласа для дискретных систем и сигналов. Рассмотрим вновь представление дискретного сигнала с применением дельта-функций (3.30), но определенное только при неотрицательных  $k \geq 0$

$$x_{\delta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - kT) . \quad (3.30)$$

Выполним преобразование Лапласа правой и левой части (3.30)

$$x_{\delta}(s) = \int_0^{\infty} x_{\delta}(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - kT)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \int_0^{\infty} \delta(t - kT)e^{-st} dt . \quad (3.38)$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем, что интеграл в правой части равен  $e^{-skT}$ , то есть в итоге получаем

$$x_{\delta}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-skT} . \quad (3.39)$$

Формула (3.39) называется дискретным преобразованием Лапласа последовательности  $x(k)$ . Экспоненту  $e^{-skT}$  можно записать в виде  $e^{-skT} = (e^{sT})^{-k}$ . Поскольку  $e^{sT}$  во всех слагаемых (3.39) одна и та же, то удобно ее рассматривать, как самостоятельную переменную. Принято обозначать ее через  $z$

$$z = e^{sT} . \quad (3.40)$$

Подставляя (3.40) в (3.39), получаем выражение, в котором уже фигурируют удобные для нас степени  $z$

$$x_{\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} . \quad (3.41)$$

Выражение (3.41) называется  $z$ -преобразованием последовательности  $x(k)$ . Как видно,  $z$ -преобразование дискретной последовательности является функцией комплексной переменной  $z$ . Оно представляет собой ряд, в который входят отчеты сигнала  $x(k)$  и переменная  $z$  в  $k$ -й степени. Для вычисления  $z$ -преобразования приходится вычислять сумму ряда, при этом используют табличные суммы из математики. Z-преобразование функции  $x(t)$  обычно записывают в виде  $Z\{x(t)\}$ .

Пример 1. Найти  $z$ -преобразование единичной импульсной функции (3.27)

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, \dots k = 0 \\ 0, \dots k \neq 0 \end{cases} . \quad (3.27)$$

В соответствии с (3.41)  $z$ -преобразование этой функции имеет вид

$$x_{\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1 . \quad (3.42)$$

Пример 2. Найти  $z$ -преобразование ступенчатой функции (3.28)

$$x(k) = \begin{cases} 0, \dots, k < 0 \\ 1, \dots, k \geq 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Используя (3.41), находим

$$x_\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (3.43)$$

В (3.43) использована формула суммы геометрической прогрессии со знаменателем  $z^{-1}$ . Ряд сходится при  $|z^{-1}| < 1$ , то есть при  $|z| > 1$ .

Пример 3. Найти z-преобразование дискретной экспоненциальной функции (3.29) (Сергиенко, с. 144)

$$x(k) = \begin{cases} 0, \dots, k < 0 \\ a^k, \dots, k \geq 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Используя (3.41), находим

$$x_\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-k} = 1 + (a^{-1}z)^{-1} + (a^{-1}z)^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (3.43-1)$$

В (3.43-1) использована формула суммы геометрической прогрессии со знаменателем  $az^{-1}$ . Ряд сходится при  $|az^{-1}| < 1$ , то есть при  $|z| > a$ .

Для распространенных функций составлены таблицы z-преобразований.

Свойства z-преобразования.

1) Линейность. Z-преобразование является линейной комбинацией отчетов и поэтому подчиняется принципу суперпозиции.

2) Задержка. При задержке последовательности на  $k$  тактов нужно умножить ее z-преобразование на  $z^{-k}$ . Этот множитель является оператором задержки, или сдвига назад дискретной последовательности на  $k$  тактов. Соответственно, умножение последовательности на  $z^k$  означает предсказание, или сдвиг вперед на  $k$  тактов. Итак:  $z^k$  является оператором сдвига назад последовательности отчетов на  $k$  тактов при отрицательном  $k$ , и сдвига вперед при положительном  $k$ .

3) Свертка (линейная) дискретных сигналов. Поскольку интегрированию в области дискретных сигналов соответствует суммирование, то свертка двух дискретных последовательностей  $x_1(k)$  и  $x_2(k)$  записывается в виде

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

Можно получить следующую формулу

$$x(z) = x_1(z)x_2(z).$$

Таким образом, свертке дискретных сигналов соответствует произведение их z-преобразований.

В таблице представлены z-преобразования некоторых сигналов (Изерман, с. 516)

4) Предельные значения (Поляков, с.32).

Начальное значение дискретного сигнала вычисляется по формуле

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z).$$

Конечное значение. Если существует установившийся режим дискретного сигнала, то он вычисляется по формуле

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})x(z).$$

$x(t)$	$x(s)$	$x(z)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$
t <sup>2</sup>	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
e <sup>-at</sup>	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$
te <sup>-at</sup>	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_0 z e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$
t <sup>2</sup> e <sup>-at</sup>	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T_0^2 z e^{-aT_0} (z+e^{-aT_0})}{(z-e^{-aT_0})^3}$
1 - e <sup>-at</sup>	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT_0})z}{(z-1)(z-e^{-aT_0})}$
e <sup>-at</sup> - e <sup>-bt</sup>	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT_0} - e^{-bT_0})}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$
sin ω <sub>1</sub> t	$\frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z \sin \omega_1 T_0}{z^2 - 2z \cos \omega_1 T_0 + 1}$
cos ω <sub>1</sub> t	$\frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega_1 T_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_1 T_0 + 1}$
e <sup>-at</sup> sin ω <sub>1</sub> t	$\frac{\omega_1}{(s+a)^2 + \omega_1^2}$	$\frac{ze^{-aT_0} \sin \omega_1 T_0}{z^2 - 2ze^{-aT_0} \cos \omega_1 T_0 + e^{-2aT_0}}$
e <sup>-at</sup> cos ω <sub>1</sub> t	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_1^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_0} \cos \omega_1 T_0}{z^2 - 2ze^{-aT_0} \cos \omega_1 T_0 + e^{-2aT_0}}$

$F(s)$	$f(t)$	$Z\{f(t)\}$	$Z_c\{f(t)\}$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$Tz \left[ \frac{s}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right]$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$	$\frac{T^2 z}{2!} \left[ \frac{s^2}{z-1} + \frac{2s}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3} \right]$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-q}$	$\frac{zq^k}{z-q}$
$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{(1-q)z}{(z-1)(z-q)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zq^k}{z-q}$
$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin \beta t$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin s\beta T + z \sin(1-s)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos \beta t$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos s\beta T - z \cos(1-s)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{zq \sin \beta T}{z^2 - 2zq \cos \beta T + q^2}$	$zq^k \frac{z \sin s\beta T + q \sin(1-s)\beta T}{z^2 - 2zq \cos \beta T + q^2}$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{z^2 - zq \cos \beta T}{z^2 - 2zq \cos \beta T + q^2}$	$zq^k \frac{z \cos s\beta T - q \cos(1-s)\beta T}{z^2 - 2zq \cos \beta T + q^2}$

D- и Z-изображения некоторых оригиналов

№	Оригинал	D-изображение	Z-изображение
1	$d[n] = \begin{cases} 1, & n=0; \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	1	1
2	$1[n]$	$\frac{e^q}{e^q - 1}$	$\frac{z}{z - 1}$
3	$e^{-\alpha n}$	$\frac{e^q}{e^q - d}, d = e^{-\alpha}$	$\frac{z}{z - d}$
4	$\sin \omega n$	$\frac{\sin \omega \cdot e^q}{e^{2q} - 2 \cos \omega \cdot e^q + 1}$	$\frac{\sin \omega \cdot z}{z^2 - 2 \cos \omega \cdot z + 1}$
5	$\cos \omega n$	$\frac{e^{2q} - \cos \omega \cdot e^q}{e^{2q} - 2 \cos \omega \cdot e^q + 1}$	$\frac{z^2 - \cos \omega \cdot z}{z^2 - 2 \cos \omega \cdot z + 1}$
6	$n$	$\frac{e^q}{(e^q - 1)^2}$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
7	$n^2$	$\frac{e^q(e^q + 1)}{(e^q - 1)^3}$	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$
8	$e^{-\alpha n} \sin \omega n$	$\frac{(d \sin \omega) \cdot e^q}{e^{2q} - (2d \cos \omega) \cdot e^q + d^2}$	$\frac{(d \sin \omega) \cdot z}{z^2 - (2d \cos \omega) \cdot z + d^2}$
9	$e^{-\alpha n} \cos \omega n$	$\frac{e^{2q} - (d \cos \omega) \cdot e^q}{e^{2q} - (2d \cos \omega) \cdot e^q + d^2}$	$\frac{z^2 - (d \cos \omega) \cdot z}{z^2 - (2d \cos \omega) \cdot z + d^2}$
10	$ne^{-\alpha n}$	$\frac{de^q}{(e^q - d)^2}$	$\frac{dz}{(z - d)^2}$
11	$n^2 e^{-\alpha n}$	$\frac{d^2 e^q (e^q + d)}{(e^q - d)^3}$	$\frac{d^2 z (z + d)}{(z - d)^3}$
12	$n \sin \omega n$	$\frac{(\sin \omega) e^{2q} - (\sin \omega) \cdot e^q}{(e^{2q} - (2 \cos \omega) \cdot e^q + 1)^2}$	$\frac{(\sin \omega) z^2 - (\sin \omega) \cdot z}{(z^2 - (2 \cos \omega) \cdot z + 1)^2}$
13	$n \cos \omega n$	$\frac{(\cos \omega) e^{3q} - 2e^{2q} + (\cos \omega) \cdot e^q}{(e^{2q} - (2 \cos \omega) \cdot e^q + 1)^2}$	$\frac{(\cos \omega) z^3 - 2z^2 + (\cos \omega) \cdot z}{(z^2 - (2 \cos \omega) \cdot z + 1)^2}$